

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

A) Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Έχουμε ... Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ (A)

1) Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x = 0$ με $\alpha \neq 0$, α, β αριθμοί και x : άγνωστος

α, β λέγονται και συντελεστές της εξίσωσης

Π.Χ. $x^2 = 3x$ (μεταφέρουμε όλους τους όρους στο α' μέλος) $\Rightarrow$

$x^2 - 3x = 0$ (αναλύουμε το α' μέλος σε γινόμενο παραγόντων) $\Rightarrow$

$x \cdot (x - 3) = 0$ (λόγω της μορφής $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$ έχουμε)

$$x = 0 \text{ ή } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 3$$

Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 3$

Παραδείγματα

$$1) 3y \left(\frac{y}{3} - 2 \right) = 0 \text{ λόγω της (A)} \Rightarrow y = 0 \text{ ή } \frac{y}{3} - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$y = 0 \text{ ή } \frac{y}{3} = 2 \Rightarrow y = 0 \text{ ή } \frac{3 \cdot y}{3} = 3 \cdot 2 \Rightarrow y_1 = 0 \text{ ή } y_2 = 6$$

$$2) -y^2 = 9y \Rightarrow -y^2 - 9y = 0 \Rightarrow -y(y + 9) = 0$$

$$\Rightarrow -y = 0 \text{ ή } y + 9 = 0 \Rightarrow y_1 = 0 \text{ ή } y_2 = -9$$

$$3) (2x - 1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (\text{κάνουμε το ανάπτυγμα και πράξεις})$$

$$\Rightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 - 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = 1$$

$$\begin{aligned}
4) \frac{(x-9)^2}{3} &= 27 \Rightarrow \frac{x^2 - 2 \cdot x \cdot 9 + 9^2}{3} = 27 \Rightarrow \frac{x^2 - 18x + 81}{3} = 27 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - \frac{18}{3}x + \frac{81}{3} = 27 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 6x + 27 = 27 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 6x + 27 - 27 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x \left(\frac{1}{3}x - 6 \right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } \frac{1}{3}x - 6 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x = 0 \text{ ή } 3 \cdot \frac{1}{3}x - 3 \cdot 6 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = 18
\end{aligned}$$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $7x(x - 7) = 0$
2. $\left(\frac{1}{2} - \omega\right)(2\omega - 1) = 0$
3. $\frac{z^2}{6} - 0,5z = 0$
4. $(x + \sqrt{3})^2 - 3 = 0$
5. $3(x + 2)^2 = 12$
6. $(3x - 2)^2 = 4$
7. $\frac{(2x-2)^2}{2} = 2$

II) Επίλυση εξίσωσης της μορφής: $\alpha x^2 + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$, α, γ αριθμοί, α και γ λέγονται συντελεστές, x άγνωστος

$$\begin{aligned}
\Pi.X. \quad x^2 - 9 &= 0 \text{ (διαφορά τετραγώνων)} \Rightarrow x^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \text{ ή } x - 3 = 0 \\
&\Rightarrow (\text{έχουμε δύο λύσεις}) \Rightarrow x_1 = -3 \text{ ή } x_2 = 3
\end{aligned}$$

Παραδείγματα

1. $3x^2 - 75 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 \cdot 25 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 25) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 5) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x + 5 = 0 \text{ ή } x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -5 \text{ ή } x_2 = 5$
2. $2\omega^2 - 72 = 0 \Rightarrow 2\omega^2 - 2 \cdot 36 = 0 \Rightarrow 2(\omega^2 - 36) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \omega^2 - 36 = 0 \Rightarrow \omega^2 - 6^2 = 0 \Rightarrow (\omega + 6)(\omega - 6) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \omega + 6 = 0 \text{ ή } \omega - 6 = 0 \Rightarrow \omega_1 = -6 \text{ ή } \omega_2 = 6$
3. $-0,2\varphi^2 + 3,2 = 0 \Rightarrow -0,2\varphi^2 = -3,2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{-0,2\varphi^2}{-0,2} = \frac{-3,2}{-0,2} \Rightarrow \varphi^2 = \frac{32}{2} \Rightarrow \varphi^2 = 16 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi^2 - 4^2 = 0 \Rightarrow (\varphi + 4)(\varphi - 4) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \varphi + 4 = 0 \text{ ή } \varphi - 4 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = -4 \text{ ή } \varphi_2 = 4$
4. $(2x - 1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 - 1^2 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (2x - 1 + 1)(2x - 1 - 1) = 0 \Rightarrow 2x(2x - 2) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 0 \text{ ή } 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } 2x = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x = 0 \text{ ή } \frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = 1$

Να λύσετε τις εξισώσεις:

- 1) $3(x + 2)^2 = 12$
- 2) $\frac{(x-9)^2}{3} = 27$
- 3) $(3x - 1)^2 - 4x^2 = 0$
- 4) $(x + \sqrt{3})^2 - 3 = 0$
- 5) $0,5(1 - y)^2 = 18$
- 6) $-2x^2 + 18 = 0$

**** Αν a είναι αρνητικός αριθμός τότε η εξίσωση $x^2 = a$ δεν έχει λύση (αδύνατη). Διότι $x^2 \geq 0, a < 0$

Παραδείγματα

$$1) 2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -8 \Rightarrow x^2 = -4 \text{ δεν έχει λύση (αδύνατη)}$$

$$\begin{aligned} 2) (x + 1)^2 &= 2x \Rightarrow x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 = 2x \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x &= 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= -1 \text{ αδύνατη, δεν έχει λύση} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (2\omega^2 + 1)(\omega^2 - 16) &= 0 \Rightarrow 2\omega^2 + 1 = 0 \text{ ή } \omega^2 - 16 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega^2 &= -\frac{1}{2} \text{ ή } (\omega + 4)(\omega - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 = -\frac{1}{2} \text{ αδύνατη} \\ \text{ή } \omega + 4 = 0 \text{ ή } \omega - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_1 &= -4 \text{ ή } \omega_2 = 4 \text{ οι δύο λύσεις} \end{aligned}$$