

Μαθηματικά Γ' Γυμνασίου

Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού – Μέρος 3^ο

Επίλυση εξισώσεων β' βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ (2^{ος} Τρόπος)

Λύνουμε ως προς x^2 , τελικά $x^2 = -\frac{\gamma}{\alpha} = \delta$ ή $x^2 = \delta$, έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\delta < 0$ τότε είναι αδύνατη
- Αν $\delta > 0$ η εξίσωση $x^2 = \delta$ έχει δύο λύσεις, τις $x = \sqrt{\delta}$ και $x = -\sqrt{\delta}$ ή $x_{1,2} = \pm\sqrt{\delta}$ διότι ισχύει ότι $(\pm\sqrt{\delta})^2 = \delta$

$$\text{Αν } x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ και } x_2 = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$1. x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3 \text{ άρα } x_1 = 3 \text{ και } x_2 = -3$$

$$2. 3x^2 - 75 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 75 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{75}{3} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x^2 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm 5 \text{ άρα } x_1 = 5 \text{ και } x_2 = -5$$

$$3. -2\omega^2 + 72 = 0 \Rightarrow -2\omega^2 = -72 \Rightarrow \frac{-2\omega^2}{-2} = \frac{-72}{-2} \Rightarrow \omega^2 = 36 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{36} \Rightarrow \omega = \pm 6 \text{ άρα } \omega_1 = 6 \text{ και } \omega_2 = -6$$

$$4. -0,2\varphi^2 + 3,2 = 0 \Rightarrow -0,2\varphi^2 = -3,2 \Rightarrow \frac{-0,2\varphi^2}{-0,2} = \frac{-3,2}{-0,2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi^2 = \frac{3,2}{0,2} \Rightarrow \varphi^2 = 16 \Rightarrow \varphi = \pm\sqrt{16} \Rightarrow \varphi_1 = 4 \text{ και } \varphi_2 = -4$$

$$\begin{aligned}
 5. (2x - 1)^2 - 1 = 0 &\Rightarrow (2x - 1)^2 = 1 \Rightarrow 2x - 1 = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2x - 1 = \pm 1 \Rightarrow 2x - 1 = 1 \text{ ή } 2x - 1 = -1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2x = 1 + 1 \text{ ή } 2x = -1 + 1 \Rightarrow 2x = 2 \text{ ή } 2x = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x_1 = 1 \text{ ή } x_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6. 3(x + 2)^2 = 12 &\Rightarrow (x + 2)^2 = \frac{12}{3} \Rightarrow (x + 2)^2 = 4 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x + 2 = \pm 2 \Rightarrow x + 2 = 2 \text{ ή } x + 2 = -2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x = 2 - 2 \text{ ή } x = -2 - 2 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ή } x_2 = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7. \frac{(x-9)^2}{3} = 27 &\Rightarrow (x - 9)^2 = 3 \cdot 27 \Rightarrow (x - 9)^2 = 81 \Rightarrow x - 9 = \\
 &\pm\sqrt{81} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x - 9 = \pm 9 \Rightarrow x - 9 = 9 \text{ ή } x - 9 = -9 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x = 9 + 9 \text{ ή } x = -9 + 9 \Rightarrow x_1 = 18 \text{ ή } x_2 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8. 0,5(1 - y)^2 = 18 &\Rightarrow \frac{0,5(1-y)^2}{0,5} = \frac{18}{0,5} \Rightarrow (1 - y)^2 = \frac{18 \cdot 2}{0,5 \cdot 2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (1 - y)^2 = 36 \Rightarrow 1 - y = \pm\sqrt{36} \Rightarrow 1 - y = \pm 6 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1 - y = 6 \text{ ή } 1 - y = -6 \Rightarrow -y = 6 - 1 \text{ ή } -y = -6 - 1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -y = 5 \text{ ή } -y = -7 \Rightarrow y_1 = -5 \text{ ή } y_2 = 7
 \end{aligned}$$

Επίλυση εξίσωσης της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$

*** Το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι ανάπτυγμα τετραγώνου σύμφωνα με
$$\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

$$\begin{aligned} 1. \quad 9x^2 - 6x + 1 = 0 &\Rightarrow (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (3x - 1)^2 = 0 \Rightarrow (3x - 1)(3x - 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3x - 1 = 0 \text{ ή } 3x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \text{ και } x_2 = \frac{1}{3} \\ &\text{δύο ρίζες ίσες ή μια διπλή λύση} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad x^2(2x - 1) - 6x(2x - 1) + 9(2x - 1) = 0 &\Rightarrow \\ &\Rightarrow (2x - 1)(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow (2x - 1)(x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2) \\ &= 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2x - 1)(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow (2x - 1)(x - 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ή } x - 3 = 0 \text{ ή } x - 3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ και } x_2 = 3 \text{ και } x_3 = 3, \quad \text{το } 3 \text{ διπλή ρίζα} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad x(x - 4) = -4 &\Rightarrow x^2 - 4x = -4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x - 2)(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ και } x_2 = 2, \quad \text{διπλή ρίζα} \end{aligned}$$

*** Αναλύουμε το α μέλος σε γινόμενο παραγόντων με ομαδοποίηση (με διάσπαση) ή με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου

(βιβλίο σελίδα 91, κάτω)

Παραδείγματα

$$\begin{aligned}
 x^2 + 15x - 16 &= 0 \Rightarrow x^2 + 16x - x - 16 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (\text{διάσπαση}) - (\text{ομαδοποίηση}) \Rightarrow x^2 - x + 16x - 16 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x(x - 1) + 16(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 16) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x - 1 = 0 \text{ ή } x + 16 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = -16
 \end{aligned}$$

Ας ξαναδούμε την ίδια άσκηση με χρήση της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου.

$$\begin{aligned}
 x^2 + 15x - 16 &= 0 \Rightarrow (\text{συμπλήρωση τετραγώνου}) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x^2 + 15x = 16 \Rightarrow 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 15x = 4 \cdot 16 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 15 + 15^2 = 4 \cdot 16 + 15^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (2x + 15)^2 = 64 + 225 \Rightarrow (2x + 15)^2 = 289 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2x + 15 = \pm\sqrt{289} \Rightarrow 2x + 15 = \pm 17 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2x + 15 = 17 \text{ ή } 2x + 15 = -17 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2x = 17 - 15 \text{ ή } 2x = -17 - 15 \Rightarrow 2x = 2 \text{ ή } 2x = -32 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x_1 = 1 \text{ και } x_2 = -16
 \end{aligned}$$

Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $y^2 + y - 12 = 0,$

β) $\omega^2 - 2\omega - 15 = 0$

γ) $2t^2 - 7t + 6 = 0,$

δ) $3\varphi^2 + 1 = 4\varphi$

ε) $5z^2 - 3z - 8 = 0,$

στ) $25x^2 + 10x + 1 = 0$

ζ) $y^2(y - 2) + 4y(y - 2) + 4y - 8 = 0$